

ДВИ МГУ: Математика

Задача 7. Стереометрия. Теоретический минимум

Важно: Стереометрия в МГУ требует филигранного владения классической геометрией. Координатный метод часто приводит к вычислительному тупику. Ставка делается на метод объемов, подобие и нестандартные свойства сфер. Все факты, выходящие за рамки школьного учебника, **необходимо доказывать**.

1. Метод объемов (Расстояние от точки до плоскости)

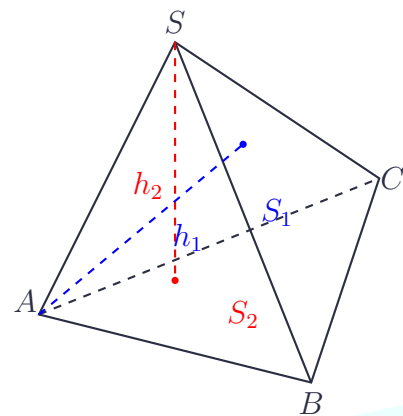
Самый частый вопрос в стереометрии — найти расстояние от точки до плоскости. Прямое построение перпендикуляра часто затруднительно, так как его основание падает вне фигуры.

Суть метода:

Объем пирамиды (тетраэдра) равен $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$. Тетраэдр можно положить на любую из его четырех граней. Отсюда возникает мощнейшее тождество: объем не зависит от того, какую грань считать основанием. Следовательно:

$$\frac{1}{3}S_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3}S_2 \cdot h_2 \implies h_1 = \frac{S_2 \cdot h_2}{S_1}$$

Где h_1 — искомое расстояние от вершины до сложной плоскости S_1 , а h_2 — легко вычисляемая высота, опущенная на плоскость S_2 .



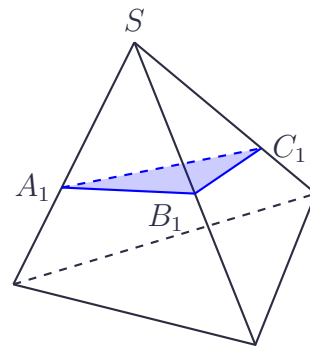
2. Отношение объемов и пересечение плоскостей

Теорема об общей вершине:

Если два тетраэдра имеют общий трехгранный угол при вершине S , то отношение их объемов равно произведению отношений длин боковых ребер:

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SAB}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC}$$

Доказательство: Примем за основания треугольники SAB и SA_1B_1 . Их площади относятся как $\frac{\frac{1}{2}SA_1 \cdot SB_1 \sin \angle S}{\frac{1}{2}SA \cdot SB \sin \angle S} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB}$. Так как точки C_1 и C лежат на одном луче SC , расстояния от них до плоскости SAB относятся как $SC_1 : SC$. Следовательно, $\frac{h_{C_1}}{h_C} = \frac{SC_1}{SC}$. Объем — это треть произведения площади основания на высоту. Перемножив эти отношения, получим требуемую формулу.



Свойства сечений:

Если секущая плоскость пересекает параллельные грани многогранника (и не параллельна им), то линии пересечения этой плоскости с гранями также **параллельны**. Это ключевое правило для достраивания сечений.

3. Теорема косинусов для трехгранного угла

Скрытое оружие ДВИ. Если известны три плоских угла при вершине, двугранный угол находится в одну строчку. Эту теорему **обязательно** нужно кратко доказывать на экзамене.

Пусть дан трехгранный угол S . Плоские углы: $\angle ASB = \gamma$, $\angle ASC = \beta$, $\angle BSC = \alpha$. Двугранный угол при ребре SA обозначим φ_A .

Формула:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi_A$$

Доказательство для ДВИ:

1) На ребре SA выберем точку M . В гранях ASB и ASC проведем перпендикуляры к ребру SA : $MB \perp SA$ и $MC \perp SA$. Тогда $\angle BMC = \varphi_A$ — линейный угол двугранного угла.

2) В прямоугольных $\triangle SMB$ и $\triangle SMC$ выразим стороны: $SB = \frac{SM}{\cos \gamma}$, $MB = SM \operatorname{tg} \gamma$; $SC = \frac{SM}{\cos \beta}$, $MC = SM \operatorname{tg} \beta$.

3) Запишем плоскую теорему косинусов для $\triangle SBC$ и $\triangle MBC$:

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cos \alpha$$

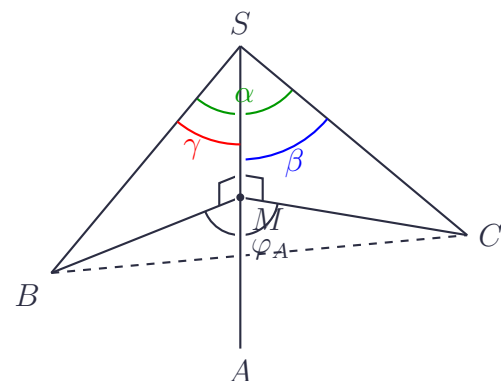
$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cos \varphi_A$$

4) Приравняем их. По теореме Пифагора $SB^2 - MB^2 = SM^2$ и $SC^2 - MC^2 = SM^2$, получаем:

$$2SM^2 = 2SB \cdot SC \cos \alpha - 2MB \cdot MC \cos \varphi_A.$$

5) Разделим на $2SM^2$ и подставим тригонометрические функции:

$$1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi_A. \text{ Домножив на } \cos \beta \cos \gamma, \text{ приходим к формуле.}$$



4. Сферы, вписанные и описанные

Сферы в стереометрии МГУ — это главный источник ошибок. Необходимо жестко разделять сферу, касающуюся **граней**, и сферу, касающуюся **ребер**.

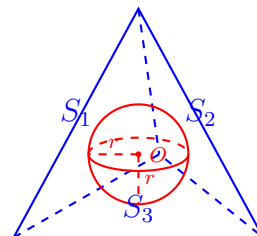
1. Вписанная в многогранник (касается всех граней):

Центр такой сферы равноудален от всех граней фигуры. Связь радиуса r , объема многогранника V и площади его полной поверхности $S_{\text{полн}}$ (аналог $S = p \cdot r$):

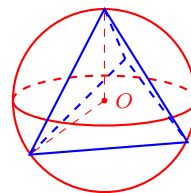
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r$$

Доказательство: Соединим центр вписанной сферы O со всеми вершинами. Многогранник разобьется на пирамиды, основаниями которых служат грани (с площадями $S_1, S_2, \dots$), а высотами — радиус сферы r (так как радиус в точку касания перпендикулярен грани). Объем многогранника равен сумме их объемов:

$$V = \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \dots = \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + \dots) = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r$$



1. Вписанная (в грани)



2. Описанная (около вершин)

2. Описанная около пирамиды (проходит через вершины):

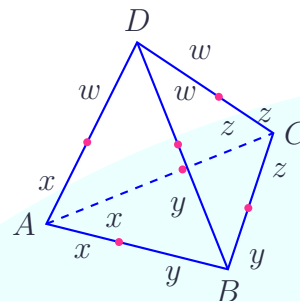
Если описанная сфера существует, то её центр лежит на пересечении плоскостей, проходящих через середины ребер перпендикулярно им. В правильной пирамиде центр лежит на оси высоты.

3. Сфера, касающаяся ВСЕХ ребер тетраэдра:

Существует тогда и только тогда, когда суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

Доказательство: Отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны. Пусть длины этих отрезков от вершин A, B, C, D до точек касания на исходящих из них ребрах равны x, y, z, w соответственно (см. рис.). Тогда $AB = x + y$, $CD = z + w \implies AB + CD = x + y + z + w$. Аналогично, $AC + BD = (x + z) + (y + w) = x + y + z + w$ и $AD + BC = (x + w) + (y + z) = x + y + z + w$. Все суммы равны. (Без доказательства: верно и обратное утверждение).



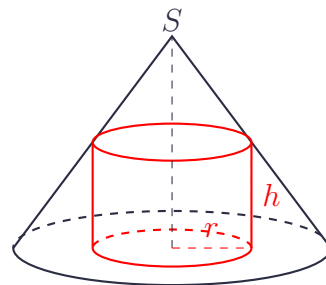
3. Касается всех 6 ребер

5. Экстремумы в пространстве

Задачи вида «Найдите наибольший объем цилиндра, вписанного в конус» или «Какую наименьшую площадь поверхности может иметь пирамида при заданном объеме».

Алгоритм решения:

1. **Выбор независимой переменной.** Обозначьте за x ключевой элемент вписанной фигуры (например, радиус цилиндра r , либо высоту h). Задайте границы для x (ОДЗ).
2. **Связь переменных.** Через подобие треугольников (в осевом сечении) выразите оставшиеся измерения вписанной фигуры через x .
3. **Составление функции.** Запишите формулу максимизируемой/минимизируемой величины (объема $V(x)$ или площади $S(x)$).
4. **Исследование.** Возьмите производную $V'(x)$, приравняйте к нулю, найдите точку экстремума и докажите, что это максимум/минимум (через смену знака производной).



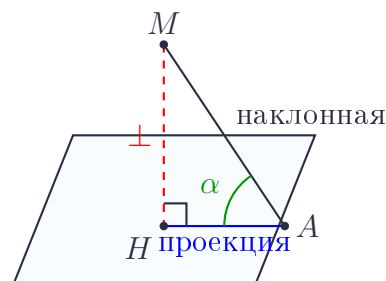
6. Углы и ортогональные проекции

1. Угол между скрещивающимися прямыми:

Равен углу между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным. На практике одну из прямых параллельным переносом сдвигают до пересечения со второй, а полученный угол ищут по теореме косинусов. Если угол получился тупым, в ответ записывают смежный с ним острый угол.

2. Угол между прямой и плоскостью:

Ортогональная проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Проекция прямой — это прямая, проходящая через проекции всех её точек. **Определение:** Угол между прямой и плоскостью — это угол между самой прямой и её **ортогональной проекцией** на эту плоскость. Для нахождения угла достаточно опустить перпендикуляр из любой точки прямой на плоскость и соединить его основание с точкой пересечения прямой и плоскости.



7. Классические леммы ДВИ (Сечения и Сферы)

1. Сечение, параллельное скрещивающимся ребрам:

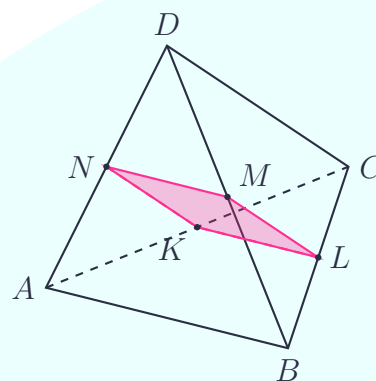
Если секущая плоскость пересекает все четыре ребра тетраэдра и параллельна паре скрещивающихся ребер, то **сечение является параллелограммом**. *Обоснование:* Линии пересечения параллельны исходным ребрам a и b . Из подобия треугольников стороны параллелограмма равны ax и $b(1-x)$, где x — доля отрезка от вершины. Площадь сечения $S = ab \sin \alpha \cdot x(1-x)$. Так как максимум параболы $x(1-x)$ достигается при $x = 1/2$, наибольшая площадь всегда получается, когда вершины сечения являются серединами ребер (для **любого** тетраэдра).

2. Лемма о касательных отрезках:

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны. Это фундаментальный факт, на котором строятся абсолютно все задачи со вписанными сферами и сферами, касающимися ребер.

3. Касание в правильных фигурах:

Если сфера касается боковой грани в её центре (или касается стороны грани в её середине), то точка касания **обязательно лежит на апофеме** (или медиане/высоте) этой грани. Это следствие свойств симметрии.



4. Радиус сферы, касающейся ребер правильного тетраэдра:

В правильном тетраэдре с ребром a сфера касается всех шести ребер в их серединах. Центр сферы совпадает с центром тетраэдра. Сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро и середину противоположного ребра, позволяет найти радиус: $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (радиус равен половине расстояния между скрещивающимися ребрами).

5. Касающиеся сферы в двугранном угле:

Если несколько сфер касаются граней двугранного угла и друг друга внешним образом, то при сечении плоскостью симметрии, перпендикулярной ребру двугранного угла, задача сводится к плоской: **окружности, вписанные в угол треугольника и касающиеся друг друга**. Центры этих окружностей лежат на биссектрисе линейного угла.

