

ДВИ МГУ: Математика

Задача 6. Параметры и экстремумы. Теоретический минимум

Важно: Задача с параметром в МГУ практически никогда не сводится к простому вычислению дискриминанта. Это всегда проверка понимания свойств функций: их ограниченности, симметрии, монотонности или графического смысла.

1. Расположение корней квадратичной функции

Часто требуется, чтобы корни x_1, x_2 уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) удовлетворяли определенным условиям, не вычисляя их явно. Используются три контрольные точки: дискриминант D , абсцисса вершины $x_v = -b/(2a)$ и знак функции на границах $f(d)$.

Базовые теоремы (для $a > 0$):

1. Оба корня больше числа d ($x_1 > d, x_2 > d$):

Парабола пересекает ось Ox правее точки d . Условия:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_v > d \\ f(d) > 0 \end{cases}$$

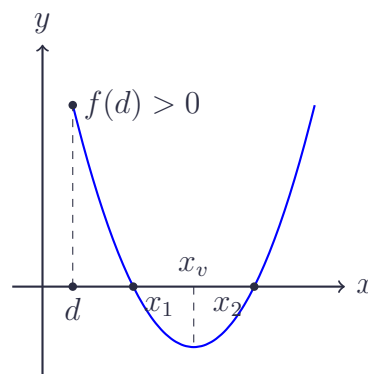
2. Число d лежит между корнями ($x_1 < d < x_2$):

Условие ровно одно (и оно гарантирует $D > 0$):

$$f(d) < 0$$

3. Корни лежат на отрезке $[M; N]$:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ M \leq x_v \leq N \\ f(M) \geq 0 \\ f(N) \geq 0 \end{cases}$$



2. Метод мажорант и неравенство Коши

Если уравнение имеет вид $f(x) = g(x)$, и при этом известно, что $f(x) \geq M$, а $g(x) \leq M$, то равенство возможно только если обе части одновременно равны M :
$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}.$$

Выделение полного квадрата:

Сумма квадратов всегда неотрицательна. **Минимум** выражения $(x - a)^2 + (y - b)^2 + C$ равен C и достигается при $x = a, y = b$.

Неравенство Коши (АМ-ГМ):

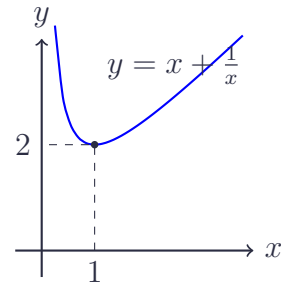
Среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Для двух чисел: $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ (при $A > 0, B > 0$).

Следствие: $x + \frac{a^2}{x} \geq 2a$ (сумма взаимно обратных).

Для трех чисел: $A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC}$.

Важно: Равенство достигается **только тогда**, когда все числа равны друг другу ($A = B = C$).



3. Инвариантность (Чётность и Симметрия)

МГУ обожает задачи с формулировкой: «При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно одно решение?»

Чётность функции:

Если функция чётная ($f(-x) = f(x)$), например, выражение содержит только чётные степени (x^2, x^4), модули ($|x|$) или функцию $\cos x$, то уравнение инвариантно (не меняется) при замене x на $-x$.

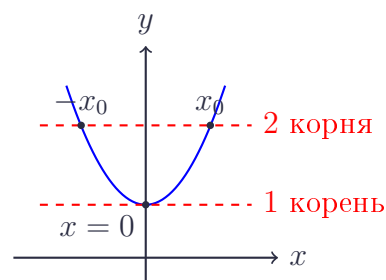
Следовательно, если у уравнения есть корень x_0 , то обязательно есть и корень $-x_0$.

Алгоритм решения:

1. **Необходимость:** Чтобы корень был единственным, пара x_0 и $-x_0$ должна «склеиться» в одну точку. Значит, единственный корень обязан быть нулём: $x = 0$.

2. Подставляем $x = 0$ в исходное уравнение и находим конкретные значения параметра a .

3. **Достаточность (ОБЯЗАТЕЛЬНО):** Подставляем найденные значения a обратно в уравнение и доказываем, что кроме $x = 0$ других корней нет.



Симметрия в системах:

Если система не меняется при замене x на y , и требуется нечетное количество решений, то обязано выполняться условие $x = y$.

4. Ограниченность и Метод вспомогательного угла

Метод вспомогательного угла:

Линейная комбинация синуса и косинуса сводится к одной функции:

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \phi)$$

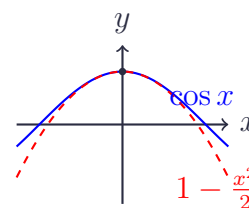
$$\text{Оценка: } -\sqrt{A^2 + B^2} \leq A \sin x + B \cos x \leq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Оценка косинуса через параболу:

Для анализа единственности корня часто требуется знать, как ведёт себя тригонометрическая функция вблизи нуля по сравнению с параболой. Стандартная оценка (ряд Тейлора):

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{для любых } x).$$

$$\sin x < x \quad (\text{для } x > 0).$$



5. Геометрический смысл (Метод Минковского)

Если выражение состоит из суммы квадратных корней, его можно интерпретировать геометрически.

Выражение $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ — это расстояние от точки $M(x, y)$ до точки $A(x_1, y_1)$.

Сумма радикалов $S = \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}$ равна сумме длин отрезков $MA + MB$, где точка $M(x, 0)$ лежит на оси абсцисс.

По **неравенству треугольника**, сумма двух сторон всегда больше либо равна третьей:

$MA + MB \geq AB$. Следовательно, минимальное значение

суммы радикалов равно длине прямолинейного отрезка AB .

Обязательное условие: Точки A и B необходимо задавать **по разные стороны** от оси Ox (то есть с разными знаками ординат y_1 и y_2), чтобы отрезок AB гарантированно пересекал ось Ox .

