

ДВИ МГУ: Математика

Задача 5. Планиметрия. Теоретический минимум

Важно: Факты из разделов 1-3 изучаются в базовом школьном курсе (кроме 3.4), их можно использовать без доказательства. Факты из раздела 4 и 3.4 на экзамене необходимо кратко доказывать.

1. Треугольники: метрика и свойства

1.1. Базовые теоремы и радиусы:

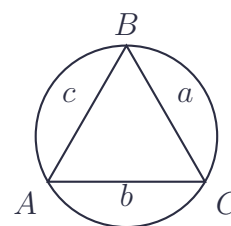
Теорема синусов: Отношение стороны к синусу противолежащего угла равно двум радиусам описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R_{\text{опис.}}$$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$.

Связь площадей и радиусов:

$$S = p \cdot r_{\text{впис}} \text{ (где } p \text{ — полупериметр)} \text{ и } S = \frac{abc}{4R_{\text{опис}}}.$$



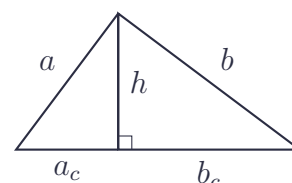
1.2. Прямоугольный треугольник:

Высота h , проведенная к гипотенузе, делит треугольник на два подобных.

Квадрат высоты равен произведению проекций катетов:
 $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета: $a^2 = c \cdot a_c$.

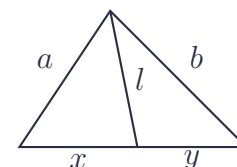
Медиана к гипотенузе равна ее половине: $m_c = \frac{c}{2} = R_{\text{опис.}}$



1.3. Свойства биссектрисы:

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

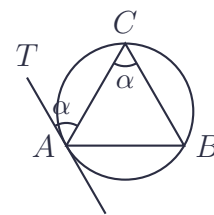
Квадрат биссектрисы равен произведению боковых сторон минус произведение отрезков основания: $l^2 = a \cdot b - x \cdot y$.



2. Окружности, хорды, касательные

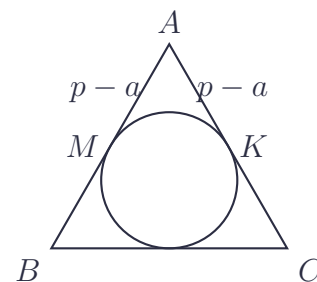
2.1. Угол между касательной и хордой:

Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой. Следовательно, он **равен любому вписанному углу**, опирающемуся на эту дугу: $\angle TAC = \angle ABC$. (Это свойство является ключом к большинству задач на подобие).



2.2. Отрезки касательных ($p - a$):

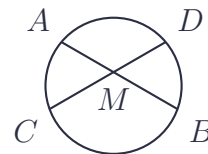
Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Если окружность вписана в $\triangle ABC$, то расстояние от вершины A до точек касания K и M вычисляется по формуле: $AK = AM = p - a$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, а a — сторона, противолежащая углу A .



2.3. Свойство пересекающихся хорд:

Если две хорды окружности AB и CD пересекаются в точке M , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

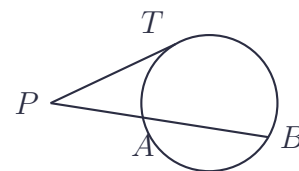
$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$



2.4. Теорема о касательной и секущей:

Если из точки P , лежащей вне окружности, проведена касательная PT (T — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B (где A лежит между P и B), то квадрат отрезка касательной равен произведению внешней части секущей на всю секущую:

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

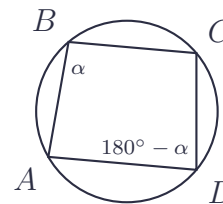


3. Четырехугольники и Площади

3.1. Вписанный четырехугольник:

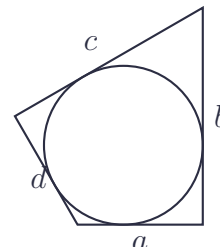
Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° ($\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$).

Углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или хорду), равны.



3.2. Описанный четырехугольник:

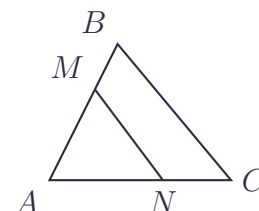
Четырехугольник можно описать около окружности (вписать в него окружность) тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны: $a + c = b + d$.



3.3. Треугольники с общим углом:

Если $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ имеют общий угол A (то есть точки M и N лежат на прямых AB и AC), то отношение их площадей равно отношению произведений сторон, заключающих этот угол:

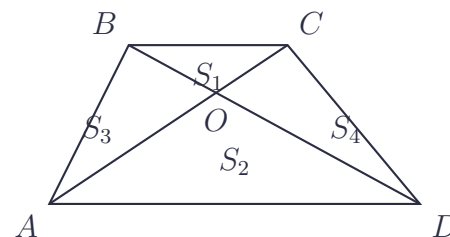
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}.$$



3.4. Площади в трапеции:

Диагонали разбивают трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) на 4 треугольника. Боковые треугольники равновелики ($S_3 = S_4$). Площадь трапеции выражается через площади треугольников у оснований: $\sqrt{S_{\text{трап}}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

Доказательство: Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты $\implies S_{ABD} = S_{ACD}$. Вычитая общую часть S_2 , получаем $S_3 = S_4$. Далее, $\triangle ABO$ и $\triangle CBO$ имеют общую высоту из вершины $B \implies \frac{S_3}{S_1} = \frac{AO}{OC}$. Аналогично $\frac{S_2}{S_4} = \frac{AO}{OC}$. Значит, $\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_2}{S_4} \implies S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_2 \implies S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$. Итого: $S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

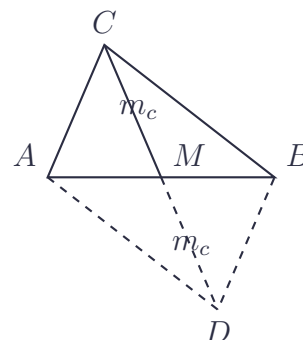


4. Продвинутые геометрические конфигурации

4.1. Формула длины медианы:

Длина медианы m_c , проведенной к стороне c , вычисляется как: $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Доказательство: Продлим медиану CM за точку M на её длину так, чтобы $MD = CM$. Четырехугольник $ACBD$ является параллелограммом, так как его диагонали AB и CD точкой пересечения M делятся пополам. По свойству параллелограмма сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон: $CD^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2) \implies (2m_c)^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \implies 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Разделив на 4 и извлекая корень, получаем требуемую формулу.



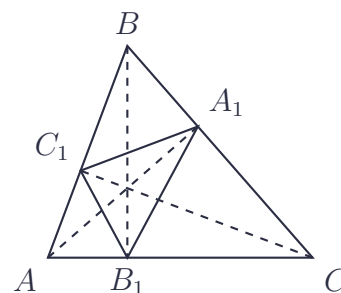
4.2. Треугольник, отсекаемый высотами, и Ортотреугольник:

Факт 1 (Отсеченный треугольник): Треугольник A_1BC_1 , образованный основаниями двух высот и общей вершиной, подобен исходному $\triangle ABC$. Коэффициент подобия равен косинусу общего угла: $k = \cos \angle B$.

Доказательство: Прямоугольные $\triangle AA_1B$ и $\triangle CC_1B$ имеют общий острый угол B . Из них $\cos B = \frac{BA_1}{AB}$ и $\cos B = \frac{BC_1}{BC}$. Значит, $\frac{BA_1}{AB} = \frac{BC_1}{BC}$. Так как угол B общий, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Факт 2 (Ортотреугольник): Ортотреугольником называется треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого служат основания всех трех высот. **Главное свойство:** Высоты исходного остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.

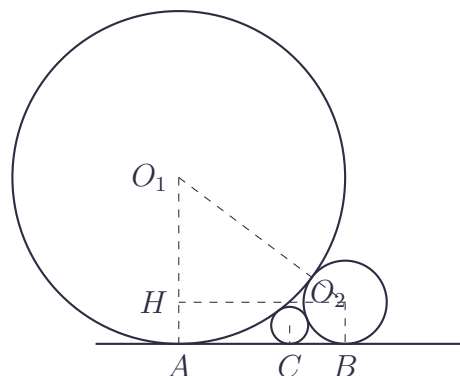
Доказательство: Из подобия отсеченных треугольников (Факт 1) следует, что $\angle BC_1A_1 = \angle C$ и $\angle AC_1B_1 = \angle C$. Тогда углы, смежные с ними внутри прямого угла $\angle CC_1B$, равны: $\angle A_1C_1C = 90^\circ - \angle C = \angle B_1C_1C$. Значит, высота CC_1 делит $\angle A_1C_1B_1$ пополам.



4.3. Формула "лунки" и касательные:

Лемма 1. Длина общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов R и r равна $l = 2\sqrt{Rr}$.

Доказательство: Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1ABO_2 . Проведем высоту O_2H . В $\triangle O_1HO_2$ гипотенуза $O_1O_2 = R + r$, катет $O_1H = R - r$. По т. Пифагора $O_2H^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr \Rightarrow l = 2\sqrt{Rr}$.



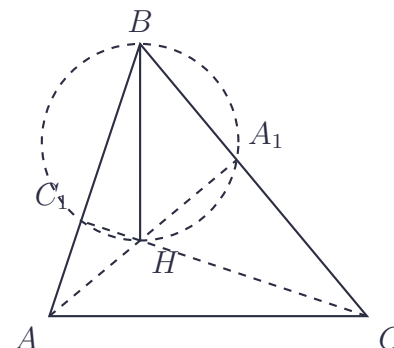
Лемма 2 (Лунка). Если окружность радиуса x касается двух данных и их общей касательной, то $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Доказательство: Отрезок касательной l разбит точкой касания третьей окружности на два: $l_1 = 2\sqrt{Rx}$ и $l_2 = 2\sqrt{rx}$. Так как $l = l_1 + l_2$, то $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$. Разделив обе части на $2\sqrt{Rrx}$, получаем требуемую формулу.

4.4. Расстояние от вершины до ортоцентра:

Длина отрезка от вершины треугольника до его ортоцентра вычисляется по формуле: $BH = 2R_{\text{опис}} \cdot |\cos \angle B|$.

Доказательство: Рассмотрим остроугольный $\triangle ABC$ и его высоты AA_1 и CC_1 , пересекающиеся в ортоцентре H . В прямоугольном $\triangle ABB_1$ угол $\angle B$ общий с $\triangle ABC$. Как доказано в п. 4.2 (отсеченный треугольник), $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos \angle B$. Значит, сторона $A_1C_1 = AC \cdot \cos \angle B$. В четырехугольнике A_1HC_1B углы $\angle HA_1B$ и $\angle HC_1B$ прямые, их сумма 180° . Следовательно, около него можно описать окружность, диаметром которой является гипотенуза BH . Для вписанного в эту окружность $\triangle A_1BC_1$ применим теорему синусов: $A_1C_1 = BH \cdot \sin \angle B$. Приравняем: $BH \cdot \sin \angle B = AC \cdot \cos \angle B$. По теореме синусов для исходного $\triangle ABC$ сторона $AC = 2R_{\text{опис}} \cdot \sin \angle B$. Подставляем: $BH \cdot \sin \angle B = 2R_{\text{опис}} \cdot \sin \angle B \cdot \cos \angle B$. Сокращая на $\sin \angle B$, получаем $BH = 2R_{\text{опис}} \cos \angle B$. (Для тупоугольного треугольника косинус берется по модулю).



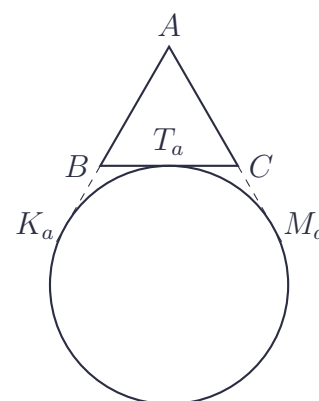
4.5. Внеписанная окружность и периметр:

Внеписанная окружность касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Всего к треугольнику можно построить три такие окружности.

Главное свойство: Расстояние от вершины A до точек касания внеписанной окружности (касающейся стороны BC) с продолжениями сторон AB и AC в точности равно полупериметру треугольника:

$$AK_a = AM_a = p, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Доказательство: Пусть окружность касается стороны BC в точке T_a , а продолжений сторон AB и AC в точках K_a и M_a . По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки: $AK_a = AM_a$, $BK_a = BT_a$, $CM_a = CT_a$. Тогда периметр треугольника $P = AB + BC + AC = AB + (BT_a + CT_a) + AC = (AB + BK_a) + (AC + CM_a) = AK_a + AM_a = 2AK_a$. Отсюда $AK_a = AM_a = p$.

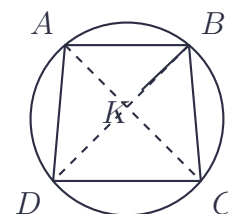


4.6. Теорема Птолемея и формула Эйлера:

Теорема Птолемея (Вписанный четырехугольник):

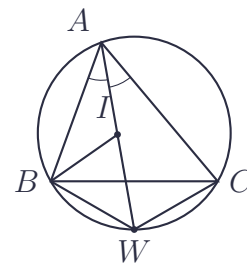
Для любого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, произведение длин его диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Доказательство: Отложим угол $\angle ABK = \angle DBC$ так, чтобы точка K лежала на диагонали AC . Вписанные углы $\angle BAK$ и $\angle BDC$ опираются на дугу BC , поэтому они равны. Значит, $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ (по двум углам). Отсюда $\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD} \implies AK \cdot BD = AB \cdot CD$. Далее, $\angle CBK = \angle ABC - \angle ABK = \angle ABC - \angle DBC = \angle ABD$. Вписанные углы $\angle BCK$ и $\angle BDA$ опираются на дугу AB , поэтому они также равны. Следовательно, $\triangle CBK \sim \triangle DBA$. Отсюда $\frac{CK}{BC} = \frac{AD}{BD} \implies CK \cdot BD = BC \cdot AD$. Складывая равенства, имеем: $(AK + CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Так как $AK + CK = AC$, получаем $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



«Лемма о трезубце»: Пусть I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, а W — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной окружностью (середина дуги BC). Тогда расстояния от точки W до вершин B, C и инцентра I равны: $WB = WC = WI$.

Доказательство: Так как AW — биссектриса, дуги BW и WC равны, поэтому равны и стягивающие их хорды: $WB = WC$. Рассмотрим $\triangle WBI$. Угол $\angle WBI = \angle WBC + \angle CBI$. Вписанные углы $\angle WBC$ и $\angle WAC$ опираются на одну дугу WC , значит $\angle WBC = \angle WAC = \angle A/2$. Так как BI — биссектриса, $\angle CBI = \angle B/2$. Получаем $\angle WBI = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$. С другой стороны, угол $\angle BIW$ является внешним для треугольника AIB при вершине I , поэтому он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\angle BIW = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$. Значит, $\angle WBI = \angle BIW$, откуда $\triangle WBI$ — равнобедренный, и $WB = WI$. Итого, $WB = WC = WI$.



Формула Эйлера (Расстояние между центрами):

Расстояние d между центром описанной (O) и вписанной (I) окружностей треугольника равно: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Доказательство: Прямая OI пересекает описанную окружность в точках M и N . Степень точки I относительно описанной окружности равна $IM \cdot IN = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2$. Продолжим биссектрису AI до пересечения с описанной окружностью в точке W (середина дуги BC). По свойству пересекающихся хорд: $IM \cdot IN = AI \cdot IW$. Следовательно, $R^2 - d^2 = AI \cdot IW$. Опустим перпендикуляр IN на сторону AB . В прямоугольном $\triangle ANI$ (где $IN = r$) гипотенуза $AI = \frac{r}{\sin(A/2)}$. По «лемме о трезубце», расстояние от W до инцентра I равно расстоянию до вершин B и C , то есть $IW = BW$. В $\triangle ABW$, вписанном в окружность радиуса R , по теореме синусов хорда $BW = 2R \sin(A/2)$. Тогда $AI \cdot IW = \frac{r}{\sin(A/2)} \cdot 2R \sin(A/2) = 2Rr$. Подставляя в выражение для степени точки, получаем: $R^2 - d^2 = 2Rr \implies d^2 = R^2 - 2Rr$.

