

ДВИ МГУ: Математика

Задача 2. Базовая алгебра и прогрессии. Теоретический минимум

1. Числовые прогрессии

Арифметическая прогрессия (АП):

- ▶ **Формула n -го члена:** $a_n = a_1 + d(n - 1)$.
- ▶ **Характеристическое свойство:** Каждый член (начиная со второго) равен среднему арифметическому соседних: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Для трех чисел: $2b = a + c$.
- ▶ **Формулы суммы n первых членов:**

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия (ГП):

- ▶ **Формула n -го члена:** $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
- ▶ **Характеристическое свойство:** Квадрат каждого члена равен произведению соседних: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. Для трех чисел: $b^2 = a \cdot c$.
- ▶ **Формула суммы n первых членов:** $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (при $q \neq 1$).
- ▶ **Свойство группировки:** Сумма следующих n членов ГП связана с суммой первых n членов отношением: $S_{2n} - S_n = q^n \cdot S_n$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:

- ▶ Возникает при условии $|q| < 1$.
- ▶ **Сумма всех членов:** $S = \frac{b_1}{1 - q}$.
- ▶ **Важно:** Квадраты членов такой прогрессии ($b_1^2, b_2^2, \dots$) также образуют бесконечно убывающую прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 .

2. Корни квадратного уравнения

Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (где $a \neq 0$ и $D \geq 0$) справедлива **Теорема Виета**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Базовые алгебраические преобразования:

- ▶ **Сумма квадратов:** $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$.
- ▶ **Квадрат разности корней:** $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$.
- ▶ **Модуль разности корней:** $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$.

Вычисление сумм высоких степеней корней (Метод сумм Ньютона):

Если требуется найти значение выражения $x_1^n + x_2^n$ для $n \geq 3$, прямое применение формул сокращенного умножения приводит к крайне громоздким вычислениям. В таких случаях целесообразно использовать рекуррентный переход.

Пусть x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Введем обозначение для суммы n -х степеней корней: $S_n = x_1^n + x_2^n$. Тогда для любого целого неотрицательного n справедливо соотношение:

$$S_{n+2} + pS_{n+1} + qS_n = 0 \implies S_{n+2} = -pS_{n+1} - qS_n$$

Пошаговый алгоритм применения:**1. Вычисление нулевой и первой сумм (база):**

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2.$$

$$S_1 = x_1^1 + x_2^1 = -p \text{ (находится напрямую по теореме Виета).}$$

2. Составление рекуррентного правила:

Подставляем числовые коэффициенты p и q конкретного уравнения в общую формулу $S_{n+2} = -pS_{n+1} - qS_n$. Это даст нам удобное правило, по которому каждый следующий шаг будет вычисляться через два предыдущих.

3. Последовательное вычисление:

Зная S_0 и S_1 , по полученному правилу находим S_2 . Затем, зная S_1 и S_2 , находим S_3 , и так далее до требуемой степени (по аналогии с числами Фибоначчи).

Пример применения алгоритма:

Задача: Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^7 + x_2^7$.

Решение:

- Выпишем коэффициенты приведенного уравнения: $p = -1, q = -3$.
- Составим правило: $S_{n+2} = -(-1)S_{n+1} - (-3)S_n \implies S_{n+2} = S_{n+1} + 3S_n$.
- Найдем базовые суммы:
 $S_0 = 2$
 $S_1 = -p = 1$
- Последовательно вычисляем следующие суммы по нашему правилу:
 $S_2 = S_1 + 3 \cdot S_0 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$
 $S_3 = S_2 + 3 \cdot S_1 = 7 + 3 \cdot 1 = 10$
 $S_4 = S_3 + 3 \cdot S_2 = 10 + 3 \cdot 7 = 31$
 $S_5 = S_4 + 3 \cdot S_3 = 31 + 3 \cdot 10 = 61$
 $S_6 = S_5 + 3 \cdot S_4 = 61 + 3 \cdot 31 = 61 + 93 = 154$
 $S_7 = S_6 + 3 \cdot S_5 = 154 + 3 \cdot 61 = 154 + 183 = 337$.
- **Ответ:** 337. (Согласитесь, это намного быстрее, чем возводить скобки в седьмую степень!)

3. Симметрические системы и многочлены

Квадрат суммы трех слагаемых:

В задачах на вычисление значений выражений с тремя переменными (a, b, c) практически всегда используется формула квадрата трехчлена:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Зная любые две из трех компонент (сумму, сумму квадратов или сумму попарных произведений), можно выразить третью.

Циклические системы уравнений:

Если дана система вида:

$$\begin{cases} a + kb = x \\ b + kc = y \\ c + ka = z \end{cases}$$

Оптимальный метод: Не пытайтесь выражать переменные друг через друга методом подстановки. Сложите все три уравнения системы левыми и правыми частями. Вы получите уравнение вида $(1 + k)(a + b + c) = x + y + z$, откуда искомая сумма $(a + b + c)$ находится в одно действие.

4. Текстовые задачи: Делимость и Проценты

Проценты и доли (метод коэффициентов):

- ▶ Увеличение исходной величины S на $p\%$ равносильно ее умножению на повышающий коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$.
- ▶ Уменьшение величины S на $p\%$ равносильно ее умножению на понижающий коэффициент $k = 1 - \frac{p}{100}$.
- ▶ При последовательном изменении цены первоначальная стоимость просто умножается на произведение всех соответствующих коэффициентов.

Арифметическая прогрессия и свойства делимости:

Характерная формулировка: «Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих N , которые делятся на A , но не делятся на B ». Данная задача сводится к работе с суммами арифметических прогрессий по следующему алгоритму:

1. Находим сумму всех чисел от 1 до N , кратных A . Эти числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом A и разностью $d = A$. Обозначим эту сумму $S_{\text{всего}}$.
2. Находим лишние числа, которые необходимо исключить. Это числа, кратные **и** A , **и** B **одновременно**. Согласно свойствам делимости, такие числа кратны Наименьшему общему кратному (НОК) чисел A и B .
3. Находим сумму всех чисел от 1 до N , кратных $\text{НОК}(A, B)$. Это также арифметическая прогрессия с разностью, равной НОК. Обозначим эту сумму $S_{\text{лишние}}$.
4. **Итоговый результат:** $S_{\text{искомая}} = S_{\text{всего}} - S_{\text{лишние}}$.

Полезная формула: Чтобы быстро найти количество натуральных чисел, кратных числу k и не превосходящих N , достаточно поделить N на k и взять целую часть от полученного результата: $n = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$.