

ДВИ МГУ: Математика

Задача 7. Стереометрия. Вариант 1.

Блок 1: Каркасы, углы и расстояния

1. *Для поиска угла между скрещивающимися прямыми перенесите одну из них параллельно до пересечения со второй. Полученный плоский угол исследуйте по теореме косинусов.*

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро равно 2, а сторона основания равна $\sqrt{3}$. Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми SA и BC .

2. *Расстояние от точки до плоскости проще всего искать через метод объемов, выразив объем пирамиды $SABC$ двумя способами через разные основания и высоты.*

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна a , а боковое ребро равно $a\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .

3. *Используйте ортогональное проектирование. Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.*

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между главной диагональю куба AC_1 и плоскостью BDC_1 .

Блок 2: Сечения и отношения объемов

4. *Примените теорему об отношении объемов тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол при вершине S : $V'/V = (SA_1/SA) \cdot (SB_1/SB) \cdot (SC_1/SC)$.*

Плоскость α пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A_1 , B_1 и C_1 так, что $SA_1 : A_1A = 1 : 2$, $SB_1 : B_1B = 2 : 3$, а $SC_1 : C_1C = 3 : 1$. В каком отношении плоскость α делит объем исходной пирамиды?

5. *По свойству сечений, линии пересечения плоскости с гранями, проходящими через параллельные ребра, параллельны. Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум скрещивающимся ребрам, всегда является параллелограммом.*

В тетраэдре $ABCD$ длины скрещивающихся ребер AB и CD равны s и d соответственно, а угол между ними равен α . Секущая плоскость параллельна прямым AB и CD . Найдите наибольшую возможную площадь сечения тетраэдра этой плоскостью.

6. *Постройте сечение, используя параллельность граней призмы. Разбейте многогранники на базовые пирамиды и призмы для подсчета объема.*

Через середину бокового ребра правильной треугольной призмы проведена плоскость, перпендикулярная скрещивающейся с этим ребром диагонали боковой грани. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость делит призму.

Блок 3: Сферы и касания

7. *Используйте инвариантную формулу связи объема и полной поверхности для вписанной сферы: $V = \frac{1}{3}S_{\text{полн}} \cdot r$. высота пирамиды, радиус вписанной сферы и апофема образуют прямоугольный треугольник в осевом сечении.*

В правильную треугольную пирамиду с высотой H и радиусом вписанной в основание окружности r вписан шар. Найдите его радиус R .

8. *Центр описанной сферы лежит на высоте правильной пирамиды. Рассмотрите прямоугольный треугольник, образованный радиусом сферы, высотой и радиусом описанной около основания окружности.*

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b , а угол между противоположными боковыми ребрами равен α . Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

9. *Примените критерий существования сферы, касающейся всех ребер: суммы длин скрещивающихся ребер должны быть равны. Проверьте это условие и выразите радиус через площадь сечений.*

Найдите радиус сферы, касающейся всех шести ребер правильного тетраэдра, длина ребра которого равна a .

Блок 4: Оптимизация в пространстве

10. *Выразите высоту и радиус основания конуса через радиус сферы R и угол при вершине осевого сечения, составьте функцию объема $V(h)$ и исследуйте ее с помощью производной.*

В шар радиуса R вписан конус наибольшего объема. Найдите высоту этого конуса и его объем.

11. *Сведите задачу к плоскому осевому сечению. Используйте подобие треугольников, чтобы выразить высоту цилиндра h через его радиус r . Составьте функцию объема $V(r)$ и найдите ее максимум с помощью производной.*

В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан цилиндр так, что его нижнее основание лежит на основании пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды. Найдите наибольший возможный объем такого цилиндра.

12. *Пусть сторона квадратного основания равна x , тогда высота бака выражается через объем V как $h = V/x^2$. Составьте функцию площади поверхности (дно + 4 стенки) и минимизируйте ее.*

Открытый бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Объем бака равен V . Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Блок 5: Специфика ДВИ МГУ (Реальные конструкции)

13. *Прототип ДВИ-2017. Сфера касается боковых граней в их центрах — это значит, что она касается апофем пирамиды. Рассмотрите плоскость, проходящую через высоту пирамиды и апофему.*

Сфера радиуса R касается всех боковых граней правильной треугольной пирамиды в их центрах, а также касается основания пирамиды. Найдите объем этой пирамиды.

14. *Прототип ДВИ. Используйте свойство равенства касательных отрезков, проведенных из вершины основания к плоскости основания и к боковому ребру.*

Сфера касается плоскости основания правильной треугольной пирамиды $SABC$, а также касается всех её боковых ребер SA, SB и SC . Найдите радиус этой сферы, если сторона основания пирамиды равна a , а боковое ребро равно b .

15. *Прототип ДВИ-2019. Две сферы касаются плоскости основания, граней и друг друга. Сделайте плоский срез через ось симметрии конструкции. Задача сведется к поиску радиусов окружностей, вписанных в углы треугольника.*

Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку A . Две различные сферы касаются плоскости основания, всех четырех боковых граней пирамиды и друг друга внешним образом. Найдите отношение их радиусов, если боковое ребро SC наклонено к плоскости основания под углом 60° .

ДВИ МГУ: Математика

Задача 7. Стереометрия. Вариант 2.

Блок 1: Каркасы, углы и расстояния

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковое ребро равно $\sqrt{7}$, а сторона основания равна 2. Найдите косинус угла между скрещивающимися прямыми SB и AC .
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна b , а высота равна $b\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости SCD .
3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью $AB_1 D_1$.

Блок 2: Сечения и отношения объемов

4. Плоскость β пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A_2 , B_2 и C_2 так, что $SA_2 : A_2A = 2 : 1$, $SB_2 : B_2B = 1 : 3$, а $SC_2 : C_2C = 1 : 1$. В каком отношении плоскость β делит объем исходной пирамиды?

5. В тетраэдре $ABCD$ длины скрещивающихся ребер AC и BD равны 8 и 10 соответственно, а угол между ними равен 30° . Секущая плоскость параллельна прямым AC и BD . Найдите наибольшую возможную площадь сечения тетраэдра этой плоскостью.

6. Через середину бокового ребра правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, перпендикулярная диагонали боковой грани, не пересекающей это ребро. Найдите отношение объемов частей, на которые плоскость делит призму.

Блок 3: Сферы и касания

7. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан шар. Найдите его радиус R .

8. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a , а угол между боковыми ребрами при вершине равен β . Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

9. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а боковое ребро равно $a\sqrt{2}$. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды, и найдите ее радиус.

Блок 4: Оптимизация в пространстве

10. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение высоты этого цилиндра к радиусу шара и его максимальный объем.
11. В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр наибольшего объема так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания конуса. Найдите размеры цилиндра и его объем.
12. Закрытая коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Объем коробки равен V . Каковы должны быть размеры коробки, чтобы площадь ее полной поверхности была минимальной?

Блок 5: Специфика ДВИ МГУ (Реальные конструкции)

13. Сфера радиуса R касается всех боковых граней правильной четырехугольной пирамиды в их центрах, а также касается основания пирамиды. Найдите объем этой пирамиды.
14. Сфера касается плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а также касается всех её боковых ребер SA, SB, SC, SD . Найдите радиус этой сферы, если сторона основания равна a , а боковое ребро равно b .
15. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Высота пирамиды проходит через точку A . Две различные сферы касаются плоскости основания, всех четырех боковых граней пирамиды и друг друга внешним образом. Найдите отношение их радиусов, если боковое ребро SC наклонено к плоскости основания под углом 45° .