

ДВИ МГУ: Математика

Задача 6. Параметры и экстремумы. Вариант 1.

Блок 1: Квадратичная функция и расположение корней

1. *Для исследования расположения корней относительно заданных точек используйте условия на вершину параболы, дискриминант и значения функции на концах интервала.*

Найдите все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ принадлежат интервалу $(-2; 4)$.

2. *Учитывайте ОДЗ знаменателя. Уравнение имеет ровно один корень, если дискриминант числителя равен нулю (и корень входит в ОДЗ), либо если корней два, но один из них «отбраковывается» знаменателем.*

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - 2a}{\sqrt{x-3}} = 0$ имеет ровно одно решение.

3. *Экстремум квадратичной функции достигается в её вершине. Проанализируйте координату y_0 .*

Найдите все значения параметра a , при которых наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$ равно 4.

Блок 2: Выделение полных квадратов и метод оценок

4. *Сгруппируйте слагаемые с x и y отдельно и выделите полные квадраты. Квадрат любого выражения неотрицателен.*

Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 30$ и укажите, при каких x и y оно достигается.

5. *Классика МГУ: неравенство Коши о средних (AM-GM). Сумма двух взаимно обратных положительных чисел: $A + B \geq 2\sqrt{AB}$. Равенство достигается при $A = B$.*

Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{9}{x}$ при условии, что $x > 0$.

6. *Если перед нами квадратичная форма от двух переменных, выделите квадрат, содержащий обе переменные (например, $(x - y)^2$), а затем дополните остаток до второго квадрата.*

Найдите минимальное значение функции $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6y + 5$.

Блок 3: Инвариантность и симметрия

7. *Уравнение инвариантно (не меняется) при замене x на $-x$. Если оно должно иметь ровно одно решение, то этим решением обязан быть ноль. Проверьте достаточность найденных a !*

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $2^{|x|} + ax^2 = a + 1$ имеет ровно одно решение.

8. *Система симметрична относительно перестановки x и y . Для нечетного числа решений пара обязана совпадать: $x = y$.*

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

9. *Вновь четность функции. Найдите кандидата на параметр через $x = 0$, а затем аккуратно решите уравнение при этом параметре, чтобы доказать единственность.*

При каких значениях параметра a уравнение $\cos x = ax^2 + 1$ имеет ровно один корень?

Блок 4: Тригонометрические параметры

10. *Используйте метод вспомогательного угла: $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \phi)$. Значения синуса ограничены отрезком $[-1; 1]$.*

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3 \sin x + 4 \cos x + 2$.

11. *Замена $t = \sin x$, где $t \in [-1; 1]$. Задача сводится к поиску корней квадратного трехчлена на заданном отрезке.*

При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - 2a \sin x + a^2 - 1 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

12. *Графический смысл или свойства функций. Косинус принимает значения от -1 до 1, а радикал задает полуокружность или ограничение на аргумент.*

Найдите все a , при которых уравнение $\sqrt{a^2 - x^2} = \cos x$ имеет ровно одно решение.

Блок 5: Показательные и логарифмические функции

13. *Сделайте замену $t = 2^x$ (не забудьте, что $t > 0$). Для того чтобы исходное уравнение имело два корня, квадратное относительно t должно иметь два строго положительных корня.*

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $4^x - a \cdot 2^{x+1} + a^2 - a - 2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

14. *Потенцируем, проверяем ОДЗ. Прямая должна пересекать «выколотую» часть параболы.*

При каких значениях параметра a уравнение $\log_2(x^2 - 4x + a) = \log_2(2x - 5)$ имеет ровно один корень?

15. *Рассмотрите функцию $f(x) = \dots$ на монотонность или найдите её экстремум через неравенство Коши.*

Найдите все значения параметра a , при которых минимум функции $f(x) = 3^x + 3^{-x} - a$ равен 4.

Блок 6: Специфика ДВИ МГУ (Реальные конструкции)

16. *Прототип 2018 года. Максимизация разности корней. Пусть x_1 и x_2 — корни. Разность в квадрате: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = D$. Значит, нужно максимизировать дискриминант!*

Найдите все значения параметра a , при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 3ax + a^4 = 0$ максимальна.

17. *Прототип 2015 года. Циклические дроби. Примените обобщенное неравенство Коши для 3 и более слагаемых: $A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC}$ (или 4 слагаемых). Заметьте, что числители и знаменатели «перетекают» друг в друга.*

Найдите все пары (x, y) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{3 - \cos x}{2 + \cos 2x} + \frac{2 + \cos 2x}{y^2 + 1} + \frac{y^2 + 1}{3 - \cos x}$$

18. *Аналитическая геометрия (Метод Минковского). Представьте корни как расстояния от точки на плоскости до двух заданных фиксированных точек. Сумма расстояний минимальна, если точка лежит на отрезке между ними.*

Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(x - 5)^2 + 9}$.

ДВИ МГУ: Математика

Задача 6. Параметры и экстремумы. Вариант 2.

Блок 1: Квадратичная функция и расположение корней

1. Найдите все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4 = 0$ принадлежат интервалу $(-1; 5)$.
2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a}{\sqrt{x-2}} = 0$ имеет ровно одно решение.
3. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 3a + 5$ равно 2.

Блок 2: Выделение полных квадратов и метод оценок

4. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 40$ и укажите, при каких x и y оно достигается.

5. Найдите наименьшее значение выражения $2x + \frac{18}{x}$ при условии, что $x > 0$.

6. Найдите минимальное значение функции $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 6y + 11$.

Блок 3: Инвариантность и симметрия

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $3^{|x|} + ax^2 = a + 2$ имеет ровно одно решение.

8. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a \\ xy = 2a - 2 \end{cases}$$
 имеет ровно два различных решения.

9. При каких значениях параметра a уравнение $\sin(x^2) = ax^2$ имеет ровно один корень?

Блок 4: Тригонометрические параметры

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $5 \sin x - 12 \cos x - 3$.
11. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - 2a \cos x + a^2 - 4 = 0$ имеет хотя бы одно решение?
12. Найдите все a , при которых уравнение $\sqrt{a^2 - x^2} = \sin x + 1$ имеет ровно одно решение.

Блок 5: Показательные и логарифмические функции

13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $9^x - a \cdot 3^{x+1} + 2a^2 - 6a = 0$ имеет ровно два различных корня.
14. При каких значениях параметра a уравнение $\log_3(x^2 - 6x + a) = \log_3(2x - 7)$ имеет ровно один корень?
15. Найдите все значения параметра a , при которых минимум функции $f(x) = 5^x + 5^{-x} - 2a$ равен 8.

Блок 6: Специфика ДВИ МГУ (Реальные конструкции)

16. Найдите все значения параметра p , при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 5px + p^4 = 0$ максимальна.

17. Найдите все пары (x, y) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - \sin x}{3 + \cos 2x} + \frac{3 + \cos 2x}{y^2 + 2} + \frac{y^2 + 2}{4 - \sin x}$$

18. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(x - 8)^2 + 9}$.