

ДВИ МГУ: Математика

Задача 5. Планиметрия. Вариант 1.

Блок 1: Прямоугольный треугольник

1. *Используйте свойства проекций катетов на гипотенузу: $h^2 = a_c \cdot b_c$ и $a^2 = c \cdot a_c$.*
В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит её на отрезки длиной 9 и 16. Найдите площадь этого треугольника и его периметр.
2. *Медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы. Радиус вписанной окружности $r = \frac{a+b-c}{2}$.*
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 13. Один из катетов равен 10. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.
3. *Рассмотрите прямоугольный треугольник, образованный высотой и медианой. Помните, что медиана равна половине гипотенузы.*
В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота и медиана, угол между которыми равен 30° . Найдите площадь треугольника, если длина высоты равна 6.

Блок 2: Окружности, хорды, касательные

4. *Свойство пересекающихся хорд: произведения отрезков равны.*

Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Известно, что $AM = 4$, $MB = 9$, а отрезок CM в 4 раза меньше отрезка MD . Найдите длину хорды CD .

5. *Квадрат касательной равен $PT^2 = PA \cdot PB$. Секунная проходит через центр, значит её отрезок внутри круга — это диаметр.*

Из точки P , лежащей вне окружности, проведены касательная $PT = 12$ и секущая, проходящая через центр окружности. Внешняя часть секущей равна 8. Найдите радиус окружности.

6. *Примените теорему о квадрате касательной и свойство перпендикуляра из центра к хорде, делящего её пополам.*

Из точки P к окружности проведены касательная $PT = 8$ и секущая PAB , внешняя часть которой $PA = 4$. Найдите радиус окружности, если расстояние от её центра до хорды AB равно 3.

Блок 3: Биссектрисы и медианы

7. Сначала пропорция $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, затем формула длины биссектрисы $l^2 = ab - xy$.
В треугольнике ABC стороны равны $AB = 10$, $BC = 15$, $AC = 20$. Найдите длину биссектрисы угла B .
8. Медианы точкой пересечения делятся как 2:1. Если медианы перпендикулярны, образуются прямоугольные треугольники.
В треугольнике две медианы равны 9 и 12, и они пересекаются под прямым углом. Найдите площадь треугольника.
9. Примените стандартную формулу длины медианы через три стороны треугольника.
В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$. Найдите длину медианы BM , проведенной к стороне AC .

Блок 4: Площади и отношения

10. *Отношение площадей треугольников с общим углом равно отношению произведений сторон, заключающих этот угол.*

На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Известно, что $AM : MB = 2 : 3$, а $AN : NC = 1 : 4$. Площадь треугольника AMN равна 4. Найдите площадь $\triangle ABC$.

11. *Формула площади трапеции через площади треугольников у оснований: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.*

Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны 16 и 25. Найдите площадь всей трапеции.

12. *Используйте свойство площадей треугольников с равными высотами для пошагового нахождения долей площадей частей от общей площади.*

В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 3$, а на отрезке AD взята точка E так, что $AE : ED = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника EBC , если площадь $\triangle ABC$ равна 48.

Блок 5: Продвинутое геометрические конфигурации

13. *Докажите и примените формулу радиуса в лунке: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$.*

Две окружности радиусов 16 и 9 касаются внешним образом. Прямая касается обеих окружностей. Найдите радиус третьей окружности, вписанной в криволинейный треугольник между этими окружностями и прямой.

14. *Обоснуйте подобие отсеченного высотами треугольника исходному ($k = \cos \angle B$) и свяжите сторону AC с радиусом через теорему синусов.*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN . Известно, что угол B равен 60° , а радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности равен 8. Найдите длину отрезка MN .

15. *Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_1BC_1 , имеет своим диаметром отрезок BH , где H — ортоцентр. Длину BH выразите как $2R \cos B$.*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника A_1BC_1 , если сторона $AC = 14$, а угол $\angle B = 45^\circ$.

Блок 6: Окружности

16. *Свойство вневписанной окружности: расстояние от вершины до точки касания равно полупериметру.*

Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Расстояние от вершины A до точки касания с прямой AB равно 15. Найдите периметр треугольника ABC .

17. *Используйте теорему Птолемея для вписанного четырехугольника: $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$.*

В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, $AD = 6$. Найдите произведение длин диагоналей AC и BD .

18. *Примените формулу Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей: $d^2 = R^2 - 2Rr$.*

В треугольнике радиус описанной окружности равен $R = 9$, а радиус вписанной окружности равен $r = 4$. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

ДВИ МГУ: Математика

Задача 5. Планиметрия. Вариант 2.

Блок 1: Прямоугольный треугольник

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна 12. Она делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 7 больше другого. Найдите периметр этого треугольника.
2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 12,5. Площадь треугольника равна 150. Найдите радиус вписанной в него окружности.
3. Высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, образуют между собой угол 30° . Найдите длину высоты, если гипотенуза треугольника равна 12.

Блок 2: Окружности, хорды, касательные

4. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Известно, что $CM = 8$, $MD = 6$, а отрезок AM на 8 больше отрезка MB . Найдите длину хорды AB .
5. Из точки P , лежащей вне окружности, проведена касательная PT и секущая, проходящая через центр. Внешняя часть секущей равна 2, а радиус окружности равен 7. Найдите длину касательной PT .
6. Из точки P к окружности проведены касательная $PT = 3$ и секущая PAB , внешняя часть которой $PA = 1$. Найдите радиус окружности, если расстояние от её центра до хорды AB равно 3.

Блок 3: Биссектрисы и медианы

7. В треугольнике ABC стороны $AB = 8$, $BC = 12$. Биссектриса угла B равна 6. Найдите длину стороны AC .
8. В треугольнике две медианы равны 15 и 20, и они пересекаются под прямым углом. Найдите площадь этого треугольника.
9. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 8$. Найдите длину медианы BM .

Блок 4: Площади и отношения

10. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки P и Q соответственно. Известно, что $AP : PB = 3 : 2$, а $BQ : QC = 1 : 5$. Площадь $\triangle ABC$ равна 75. Найдите площадь треугольника PBQ .
11. Диагонали трапеции разбивают её на 4 треугольника. Площадь одного из боковых треугольников равна 12, а площадь треугольника при верхнем основании равна 9. Найдите площадь всей трапеции.
12. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD : DC = 1 : 2$, а точка E делит отрезок AD в отношении $AE : ED = 3 : 1$. Найдите площадь треугольника EBC , если общая площадь треугольника ABC равна 60.

Блок 5: Продвинутое геометрические конфигурации

13. Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается обеих окружностей. Радиус меньшей окружности равен 4, а радиус третьей окружности, вписанной в "лунку" между ними, равен 1. Найдите радиус большей окружности.
14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN . Известно, что $MN = 6$, а радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности равен 6. Найдите косинус угла B .
15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника A_1BC_1 , если сторона $AC = 18$, а угол $\angle B = 60^\circ$.

Блок 6: Окружности

16. Периметр треугольника ABC равен 42. Внеписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно. Найдите длину отрезка AK .
17. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны $AC = 8$ и $BD = 6$. Три стороны четырехугольника равны $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$. Найдите длину стороны AD .
18. Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника равно 3, а радиус описанной окружности равен 5. Найдите радиус вписанной окружности.