

# ДВИ МГУ: Математика

## Задача 4. Иррациональность, модули и ОДЗ. Вариант 1.

### Блок 1: Иррациональные уравнения и неравенства

1. *Нахождение общего ОДЗ и двукратное возведение в квадрат с контролем знака правой части.*

Решите уравнение:  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$ .

2. *Схема  $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff \{f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f(x) \leq g^2(x)\}$ . Будьте внимательны с изолированными точками!*

Решите неравенство:  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 1$ .

3. *Схема  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  распадается на две системы: 1)  $\{g(x) < 0, f(x) \geq 0\}$  и 2)  $\{g(x) \geq 0, f(x) > g^2(x)\}$ .*

Решите неравенство:  $\sqrt{x^2 - x - 2} > x + 2$ .

### Блок 2: Уравнения и неравенства с модулем

4. *Использование свойства  $|a| < b \iff -b < a < b$ . Двойное неравенство решается как система двух неравенств.*

Решите неравенство:  $|x^2 - 5x| < 6$ .

5. *Геометрический смысл модуля: сумма расстояний от точки  $x$  до точек 2 и  $-3$  равна 5. Это отрезок между корнями.*  
Решите уравнение:  $|x - 2| + |x + 3| = 5$ .

### Блок 3: Сложные логарифмы

6. *Переменное основание. Раскрытие модуля в основании на два случая:  $x > 0$  и  $x < 0$ , с учетом ОДЗ  $x \neq \pm 1$ .*

Решите неравенство:  $\log_{|x|}(x^2 - 2x) \geq 1$ .

7. *Многоэтажный логарифм. Снятие внешнего логарифма с учетом ОДЗ внутреннего выражения.*

Решите неравенство:  $\log_2(2 - \log_3(x + 1)) \geq 0$ .

8. *Метод рационализации для переменного основания  $\log_a b > 1 \sim (a - 1)(b - a) > 0$ . Внимание на строгое ОДЗ дроби!*

Решите неравенство:  $\log_x \left( \frac{2x-1}{x-1} \right) > 1$ .

### Блок 4: Тригонометрия с жестким ОДЗ

9. *Дробь равна нулю  $\iff$  числитель равен нулю, а знаменатель существует и не равен нулю. Необходим отбор корней на окружности.*

Решите уравнение:  $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2 \sin x} - 1} = 0$ .

10. *Определение четверти, в которой синус и косинус одновременно отрицательны. Переход к синусу двойного угла.*

Решите уравнение:  $\log_3(-\sin x) + \log_3(-\cos x) = \log_3\left(\frac{1}{4}\right)$ .

# ДВИ МГУ: Математика

## Задача 4. Иррациональность, модули и ОДЗ. Вариант 2.

### Блок 1: Иррациональные уравнения и неравенства

1. Решите уравнение:  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ .

2. Решите неравенство:  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x - 2$ .

3. Решите неравенство:  $\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3$ .

### Блок 2: Уравнения и неравенства с модулем

4. Решите неравенство:  $|x^2 - x| < 2$ .

5. Решите уравнение:  $|x - 1| + |x + 4| = 5$ .

### Блок 3: Сложные логарифмы

6. Решите неравенство:  $\log_{|x-1|}(x^2 - 4x + 3) \geq 1$ .

7. Решите неравенство:  $\log_3(2 - \log_2(x - 1)) \geq 0$ .

8. Решите неравенство:  $\log_x \left( \frac{3x-2}{x-1} \right) > 1$ .

### Блок 4: Тригонометрия с жестким ОДЗ

9. Решите уравнение:  $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2 \cos x - 1}} = 0$ .

10. Решите уравнение:  $\log_2(-\sin x) + \log_2(\cos x) = -1$ .