

ДВИ МГУ: Математика

Задача 3. Уравнения и неравенства. Вариант 1.

Блок 1: Логарифмические неравенства

1. *Переход к равносильной системе через метод рационализации: $\log_{a(x)} b(x) - \log_{a(x)} c(x) \sim \frac{b(x)-c(x)}{a(x)-1}$ при условии строгого соблюдения ОДЗ.*

Решите неравенство: $\log_{x+3}(x^2 - 4x + 3) \leq 2$.

2. *Логарифмирование обеих частей неравенства по основанию 2 и решение квадратного неравенства относительно $\log_2 x$.*

Решите неравенство: $x^{\log_2 \sqrt{x}} > 16$.

3. *Применение обобщенного метода интервалов или рационализации логарифмической дроби. Внимание на строгие ограничения ОДЗ!*

Решите неравенство: $\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+1)} \geq 0$.

Блок 2: Показательные и смешанные неравенства

4. *Замена переменной $t = 2^x$ в числителе и метод рационализации знаменателя: $\sqrt{A} - B \sim A - B^2$. Не забудьте про выколотые точки!*

Решите неравенство: $\frac{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}{\sqrt{x+1} - 2} \leq 0$.

5. *Метод группировки слагаемых и вынесение общего множителя за скобки с последующим применением метода интервалов.*

Решите неравенство: $x^2 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - x^2 + 4 \geq 0$.

6. *Рационализация показательной функции $a^{f(x)} - a^{g(x)} \sim f(x) - g(x)$ при $a > 1$ и аккуратное сокращение дроби с сохранением ограничений.*

Решите неравенство: $\frac{2^{x^2-x-4}}{x^3-x} \leq 0$.

Блок 3: Базовые тригонометрические уравнения

7. *Использование формулы синуса двойного угла и метод группировки для разложения уравнения на два простейших множителя.*

Решите уравнение: $\sin 2x - 2 \sin x + \cos x - 1 = 0$.

8. *Применение основного тригонометрического тождества для сведения уравнения к квадратному относительно синуса.*

Решите уравнение: $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$.

9. *Применение формулы суммы косинусов для перехода к произведению и вынесение общего множителя.*

Решите уравнение: $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$.

Блок 4: Сложная тригонометрия и кратные углы

10. *Использование формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, разложение на множители и введение вспомогательного угла.*

Решите уравнение: $\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x = 0$.

11. *Выделение полного квадрата: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ и переход к синусу двойного угла.*

Решите уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

Блок 5: Тригонометрические неравенства

12. *Сведение неравенства к квадратному относительно синуса и решение простейшего тригонометрического неравенства на единичной окружности.*

Решите неравенство: $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 \geq 0$.

13. *Выражение $\cos 2x$ через разность квадратов, разложение на множители и применение метода интервалов на периоде 2π .*

Решите неравенство: $\cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sin x \geq 0$.

ДВИ МГУ: Математика

Задача 3. Уравнения и неравенства. Вариант 2.

Блок 1: Логарифмические неравенства

1. Решите неравенство: $\log_{x+4}(x^2 - 5x + 4) \leq 2$.

2. Решите неравенство: $x^{\log_3 \sqrt{x}} > 9$.

3. Решите неравенство: $\frac{\log_3(4-x)}{\log_3(x+2)} \geq 0$.

Блок 2: Показательные и смешанные неравенства

4. Решите неравенство: $\frac{9^x - 12 \cdot 3^x + 27}{\sqrt{x+2} - 2} \leq 0$.

5. Решите неравенство: $x^2 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x - x^2 + 9 \geq 0$.

6. Решите неравенство: $\frac{3x^2+x-9}{x^3-x} \leq 0$.

Блок 3: Базовые тригонометрические уравнения

7. Решите уравнение: $\sin 2x - 2 \cos x + \sin x - 1 = 0$.

8. Решите уравнение: $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$.

9. Решите уравнение: $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$.

Блок 4: Сложная тригонометрия и кратные углы

10. Решите уравнение: $\sin x + \sqrt{2} \cos 2x + \cos x = 0$.

11. Решите уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x = -\sin 2x - \frac{1}{2}$.

Блок 5: Тригонометрические неравенства

12. Решите неравенство: $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 \leq 0$.

13. Решите неравенство: $\sin x + \sqrt{2} \cos 2x + \cos x \leq 0$.