

ДВИ МГУ: Математика

Задача 2. Прогрессии и базовая алгебра. Вариант 1.

Блок 1: Классические прогрессии

1. *Использование формулы суммы n первых членов АП и составление системы линейных уравнений для нахождения a_1 и d .*

Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 100, а сумма следующих десяти членов равна 300. Найдите первый член и разность прогрессии.

2. *Симметричное обозначение членов прогрессии через средний член $(a-d, a, a+d)$ для быстрого нахождения суммы.*

Три числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 15, а сумма их квадратов равна 83. Найдите эти числа.

3. *Применение формулы n -го члена ГП с учетом условия возрастания при извлечении корня четной степени.*

Между числами 2 и 162 вставьте три числа так, чтобы они вместе с заданными образовывали возрастающую геометрическую прогрессию.

4. *Использование свойства группировки сумм: сумма следующих n членов ГП равна сумме первых n членов, умноженной на q^n .*

Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 15, а сумма следующих четырех членов равна 240. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

5. *Использование свойства, что квадраты членов ГП также образуют бесконечно убывающую ГП со знаменателем q^2 .*

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов её членов равна 72. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

6. *Использование формулы суммы арифметической прогрессии и метода включений-исключений (вычесть сумму чисел, делящихся на их НОК).*

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 105, которые делятся на 3, но не делятся на 5.

Блок 2: Смешанные прогрессии и произведения

7. *Переход от АП к ГП через характеристическое свойство геометрической прогрессии.*

Сумма трех чисел, образующих АП, равна 15. Если к ним прибавить 1, 4 и 19, то получатся три числа, образующие ГП. Найдите исходные числа.

8. *Симметричное обозначение членов геометрической прогрессии $\left(\frac{b}{q}, b, bq\right)$ для мгновенного нахождения среднего члена из их произведения.*

Три числа образуют ГП. Их сумма равна 26, а произведение равно 216. Найдите эти числа.

9. *Поиск периода последовательности при заданном рекуррентном соотношении произведений.*

Последовательность задана условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1}a_n = 10$. Найдите сумму первых 50 членов.

10. *Использование связи между n -м членом и произведением первых n членов: $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$.*

Произведение первых n членов задается формулой $P_n = 3^n \cdot n!$. Найдите a_{10} .

Блок 3: Корни квадратного уравнения

11. *Комбинирование теоремы Виета для суммы корней и характеристического свойства арифметической прогрессии.*

Корни уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ ($x_1 < x_2$) и число 18 образуют арифметическую прогрессию. Найдите q .

12. *Последовательное выделение полных квадратов: от суммы квадратов к сумме четвертых степеней с использованием теоремы Виета.*

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^4 + x_2^4$.

13. *Использование формулы квадрата разности через сумму и произведение: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, с последующим применением теоремы Виета.*

Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a .

14. *Приведение дробей к общему знаменателю и применение метода сумм Ньютона для вычисления числителя.*

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5}$.

15. *Применение рекуррентного правила (сумм Ньютона) к разности степеней корней.*

Известно, что x_1 и x_2 — корни $x^2 - 4x + 1 = 0$ ($x_1 > x_2$). Последовательность $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$.

Найдите a_4 .

Блок 4: Системы и многочлены

16. *Прямое применение формулы квадрата суммы трех слагаемых (симметрические многочлены).*

Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 4$. Найдите $a^2 + b^2 + c^2$.

17. *Сложение всех уравнений циклической системы для мгновенного получения искомой суммы.*

Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 2b = 3$, $b + 2c = 4$, $c + 2a = 5$.

Блок 5: Текстовые задачи

18. *Последовательное применение процентных изменений в виде множителей к неизвестной начальной сумме.*

Автовладелец продал автосалону свой автомобиль за 60% его первоначальной стоимости. Автосалон выставил на продажу этот автомобиль за цену, на 20% большую уплаченной. Какова доля получившейся цены по отношению к первоначальной?

ДВИ МГУ: Математика

Задача 2. Прогрессии и базовая алгебра. Вариант 2.

Блок 1: Классические прогрессии

1. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 50, а сумма следующих пяти членов равна 150. Найдите первый член и разность прогрессии.
2. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 21, а сумма их квадратов равна 155. Найдите эти числа.
3. Между числами 3 и 96 вставьте четыре числа так, чтобы они вместе с заданными образовывали возрастающую геометрическую прогрессию.
4. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 26, а сумма следующих трех членов равна 702. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.
5. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6, а сумма квадратов её членов равна 18. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

6. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 100, которые делятся на 4, но не делятся на 3.

Блок 2: Смешанные прогрессии и произведения

7. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к ним прибавить 2, 3 и 9, то получатся три числа, образующие ГП. Найдите исходные числа.
8. Три числа образуют ГП. Их сумма равна 19, а произведение равно 216. Найдите эти числа.
9. Последовательность задана условиями $a_1 = 3$, $a_{n+1}a_n = 12$. Найдите сумму первых 40 членов.
10. Произведение первых n членов задаётся формулой $P_n = 5^n \cdot n!$. Найдите a_5 .

Блок 3: Корни квадратного уравнения

11. Корни уравнения $x^2 - 15x + q = 0$ ($x_1 < x_2$) и число 27 образуют арифметическую прогрессию. Найдите q .
12. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x + 2 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^4 + x_2^4$.
13. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 10 = 0$ равна 7. Найдите все возможные значения a .
14. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5}$.
15. Известно, что x_1 и x_2 — корни $x^2 - 5x + 1 = 0$ ($x_1 > x_2$). Последовательность $a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$. Найдите a_4 .

Блок 4: Системы и многочлены

16. Известно, что $a + b + c = 6$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 16$. Найдите $ab + bc + ac$.

17. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 3b = 2$, $b + 3c = 4$, $c + 3a = 6$.

Блок 5: Текстовые задачи

18. В начале года цена товара была снижена на 30%. В середине года новую цену повысили на 20%. Сколько процентов составляет окончательная цена от первоначальной?