

ДВИ МГУ: Математика

Задача 1. Элементарные вычисления. Вариант 1.

Блок 1: Алгебраические ловушки и работа с функциями

1. *Прямая аккуратная подстановка и работа с многоэтажными дробями.*

Найдите $f\left(\frac{2}{7}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{3}{7}$.

2. *Сначала упростить функцию алгебраически (сократить дроби), а затем подставлять неудобное число.*

Вычислите значение функции $f(x)$ в точке $x = \frac{2025}{2026}$, если известно, что:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$$

3. *Вынесение общего множителя в наименьшей степени за скобки вместо вычислений «в лоб».*

Найдите целое число, равное значению выражения:

$$\frac{2^{20} \cdot 3^{10} - 2^{19} \cdot 3^{11}}{6^9 \cdot 2^{10} + 6^{10} \cdot 2^9}$$

4. *Сворачивание оснований в куб и извлечение корня перед возведением в квадрат.*

Найдите натуральное число, заданное выражением:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3} - \frac{13}{18}$$

5. *Использование формулы разности квадратов: умножить искомую сумму на известную разность.*

Чему равна сумма выражений $\sqrt{9+t^2}$ и $\sqrt{2+t^2}$, если их разность равна 1?

6. *Использование формулы квадрата суммы трех слагаемых: $(a+b+c)^2$.*

Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=4$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

7. *Сложение всех уравнений циклической системы столбиком.*

Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+2b=3$, $b+2c=4$, $c+2a=5$.

Блок 2: Иррациональность и скрытые модули

8. *Оценка знака подмодульного выражения без возведения в квадрат.*

Вычислите значение выражения: $|2\sqrt{2}-3| + |2\sqrt{2}-2|$.

9. *Выделение полного квадрата под корнем и грамотное раскрытие модуля (с оценкой знака).*

Найдите в явном виде число, заданное выражением:

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$$

10. *Избавление от иррациональности в знаменателях домножением на сопряженное выражение.*

Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^2$$

11. *Выделение полного квадрата под корнем (или внесение множителя под корень).*

Найдите в явном виде натуральное число:

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$$

Блок 3: Оценки, асимптотика и сравнение чисел

12. *Выделение разности квадратов под корнем для быстрого вычисления целой части.*

Найдите целую часть числа: $\left[\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}\right]$.

13. *Группировка удобных дробей и грубая оценка суммы для поиска ближайшего целого.*

Найдите целое число, ближайшее к:

$$2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)$$

14. *Вычисление подкоренного выражения и нахождение интервала между двумя точными квадратами.*

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

$$\sqrt{\frac{4^3 + 3^4}{3^4 - 4^3}}$$

15. *Выделение целой части из суммы дробей под корнем.*

Какое из чисел больше: $\sqrt{\frac{6}{7} + 7 + \frac{7}{6}}$ или 3?

16. *Сравнение обоих чисел с единицей без сложных вычислений.*

Какое из чисел больше: $(\sqrt{3})^{15}$ или $\frac{9}{14}$?

Блок 4: Тригонометрические и логарифмические вычисления

17. *Применение формулы синуса двойного угла через тангенс.*

Вычислите: $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)$.

18. *Использование нестандартных табличных значений тригонометрических функций для углов, кратных $\pi/5$.*

Найдите значение выражения: $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5}$.

19. *Преобразование суммы косинусов в произведение для сокращения дроби.*

Упростите и вычислите: $\frac{\cos 80^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 50^\circ}$.

20. *Избавление от иррациональности в дроби и подстановка табличного значения синуса.*

Найдите натуральное число: $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \right)^4 - \frac{1}{4}$.

21. *Последовательное вычисление логарифмов «изнутри наружу».*

Вычислите: $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

22. *Переход к новому (одинаковому) основанию логарифмов.*

Вычислите: $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

23. *Использование свойства разности логарифмов и выделение полного квадрата.*

Найдите наименьшее целое число, превосходящее число:

$$\log_2(3 + 2\sqrt{2}) - \log_2(1 + \sqrt{2})$$

24. *Учет ОДЗ и замена переменной для сведения к простейшему уравнению.*

Решите уравнение: $\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x$.

25. *Подстановка базовых значений функций и аккуратный подсчет многоэтажной дроби.*

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением:

$$\left(\frac{3 \sin(\pi/2)}{\log_2 16} - \sqrt{\frac{4}{9}} \right)^{-1}$$

ДВИ МГУ: Математика

Задача 1. Элементарные вычисления. Вариант 2.

Блок 1: Алгебраические ловушки и работа с функциями

1. Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$, если $f(x) = \frac{x}{2-x} + \frac{1}{5}$.

2. Вычислите значение функции $f(x)$ в точке $x = \frac{2026}{2025}$, если известно, что:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$$

3. Найдите целое число, равное значению выражения:

$$\frac{5^{15} \cdot 2^{10} - 5^{14} \cdot 2^{11}}{10^9 \cdot 5^5 + 10^{10} \cdot 5^4}$$

4. Найдите рациональное число, заданное выражением:

$$\left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^{2/3} + \left(\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)^{2/3} - \frac{1}{20}$$

5. Чему равна сумма выражений $\sqrt{15+t^2}$ и $\sqrt{3+t^2}$, если их разность равна 2?

6. Известно, что $x + y + z = 6$ и $xy + yz + xz = 5$. Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

7. Найдите $x + y + z$, если известно, что $x + 3y = 2$, $y + 3z = 6$, $z + 3x = 8$.

Блок 2: Иррациональность и скрытые модули

8. Вычислите значение выражения: $|3\sqrt{3} - 6| + |3\sqrt{3} - 5|$.

9. Найдите в явном виде число, заданное выражением:

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$$

10. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)^2$$

11. Найдите в явном виде натуральное число:

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}(9 + 3\sqrt{5})$$

Блок 3: Оценки, асимптотика и сравнение чисел

12. Найдите целую часть числа: $\left[\sqrt{2020 \cdot 2030 - 2016 \cdot 2034}\right]$.

13. Найдите целое число, ближайшее к:

$$3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)$$

14. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

$$\sqrt{\frac{5^3 + 2^6}{5^3 - 2^6}}$$

15. Какое из чисел больше: $\sqrt{\frac{7}{8} + 8 + \frac{8}{7}}$ или 3?

16. Какое из чисел больше: $(\sqrt[3]{2})^5$ или $\frac{10}{3}$?

Блок 4: Тригонометрические и логарифмические вычисления

17. Вычислите: $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

18. Найдите значение выражения: $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{3\pi}{10}$.

19. Упростите и вычислите: $\frac{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$.

20. Найдите натуральное число: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \frac{5}{16}$.

21. Вычислите: $\log_3 \log_{64} \frac{212}{53}$.

22. Вычислите: $\log_{15} 5 \cdot \log_{25} 15$.

23. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число:

$$\log_5(9 + 4\sqrt{5}) - \log_5(\sqrt{5} + 2)$$

24. Решите уравнение: $\log_x |3x^2 - 2| = 4 \log_{|3x^2 - 2|} x$.

25. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением:

$$\left(\frac{5 \cos(0)}{\log_3 81} - \sqrt{\frac{9}{16}} \right)^{-1}$$