

ДВИ МГУ: Математика

Дополнительный практикум: «Слепые зоны и актуальные тренды» (С учетом изменений и вариантов 2025 года)

Методическое описание: В данный практикум включены прототипы задач ДВИ МГУ, которые за последние годы претерпели радикальные концептуальные изменения со стороны составителей, но традиционно упускаются в стандартных подборках. Особое внимание уделено материалам свежего экзамена 2025 года, закрепившего формат из 7 комплексных задач.

Раздел 1: Нестандартные последовательности и целочисленный анализ (№2)

1. (**Тренд 2025 года**) Дана последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, удовлетворяющих при каждом натуральном n равенству:

$$a_{n+1} = \frac{5 - a_n}{4}$$

Пусть S_n обозначает сумму первых n членов этой последовательности: $S_n = a_1 + \dots + a_n$. Найдите наименьшее значение n , при котором выполняется строгое неравенство:

$$|S_n - n - 8| < \frac{1}{1000}$$

если известно, что первый член последовательности равен $a_1 = 11$.

2. (**Прототип функциональных уравнений**) Дана последовательность действительных чисел $a_0, a_1, a_2, \dots$. Найдите значение a_8 , если известно, что $a_1 = 1$, а для любой пары индексов n, m таких, что $n \geq m \geq 0$, справедливо фундаментальное рекуррентное равенство:

$$a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$$

3. (**Прототип «Зажатия» в Теории Чисел**) Найдите все пары натуральных чисел (n, m) , для которых алгебраическое выражение $n^2 + 7n + 1$ в точности является полным квадратом натурального числа m^2 .
4. (**Экстремумы разности корней**) Найдите все значения параметра a , при которых разность между наибольшим и наименьшим корнями квадратного уравнения $x^2 + 3ax + a^4 = 0$ принимает свое максимальное значение.

Раздел 2: Усложненные логарифмы и тригонометрический отбор (№3–4)

5. (Логарифм в показателе степени — Тренд 2025) Решите показательно-логарифмическое неравенство:

$$(\sqrt[3]{x})^{5+\log_2 x} \geq 2^{1+\log_2 x}$$

6. (Взаимно обратные логарифмы) Решите неравенство с переменным основанием:

$$\log_x \left(x^2 + \frac{3}{2} \right) \leq 4 \log_{x^2 + \frac{3}{2}} x$$

7. (Тригонометрические ограничения ОДЗ) Решите тригонометрическое уравнение и найдите все корни с учетом ограничений области определения:

$$2 \cdot \frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

Раздел 3: Геометрические отношения и метрика (№5)

8. (**Метод площадей и отношения**) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что выполняются соотношения отрезков $AM : MB = 1 : 2$ и $BN : NC = 2 : 3$. Чевяны AN и CM пересекаются во внутренней точке треугольника O . Найдите:
- а) Отношение отрезков $AO : ON$, в котором точка O делит прямую AN .
 - б) Отношение площади треугольника $\triangle AOC$ к площади получившегося четырехугольника $MBNO$.
9. (**Метрическая формула биссектрисы**) В треугольнике ABC известны длины боковых сторон: $AB = 8$, $BC = 12$. Биссектриса угла $\angle B$ равна 6. Найдите точную длину третьей стороны треугольника AC , используя формулу связи боковых сторон и отрезков основания.

Раздел 4: Многомерные оценки и алгебра многочленов (№6)

10. (**Многомерная оптимизация — Философия 2025**) Пусть a, b, c — строго положительные действительные числа, удовлетворяющие условию нормировки $a + b + c = 3$. Докажите, что для них выполняется точное неравенство:

$$\frac{(1+a)^2}{a + \frac{1}{b}} + \frac{(1+b)^2}{b + \frac{1}{c}} + \frac{(1+c)^2}{c + \frac{1}{a}} \leq 6$$

Найдите тройку значений (a, b, c) , при которой достигается равенство.

11. (**Локализация тригонометрических корней**) Найдите все значения параметра a , при которых тригонометрическое уравнение $\cos 2x - 2a \sin x + a = 0$ имеет ровно три различных корня на замкнутом отрезке $[0; \pi]$.

12. (**Сворачивание многочленов высших степеней**) Пусть задан многочлен четвертой степени $f(x) = x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + c$, который принимает исключительно неотрицательные значения на всей числовой прямой, и при этом $f(3) = 0$. Известно, что сумма корней его производной $f'(x)$ равна 9, а произведение корней производной равно 27. Найдите числовое значение $f(5)$.

Раздел 5: Метрика многогранников и сечения (№7)

13. (**Расстояния между скрещивающимися прямыми**) В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с длиной ребра, равной 1, выбраны четыре точки. Точка F — середина ребра AA' , точка E — середина ребра AB , точка Q — середина ребра BB' , а точка P — середина ребра $B'C'$. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми FE и QP .
14. (**Свойства ромбоэдра**) В параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ абсолютно все ребра равны между собой (ромбоэдр), а плоские углы при вершине B равны. Известно, что центр сферы радиуса $R = 2$, описанной около выделенного тетраэдра $AB'CD'$, лежит строго в плоскости грани $AB'C$. Найдите точную длину ребра данного параллелепипеда.
15. (**Сечения, образующие правильные фигуры**) Секущая плоскость пересекает все грани правильной треугольной пирамиды $SABC$ таким образом, что получившееся в сечении четырехугольное геометрическое тело является точным квадратом со стороной 1. Найдите длину ребра основания пирамиды, если известно, что плоский двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.