

ДВИ МГУ: Математика

Теоретический минимум: Нестандартные методы

Методическое описание: В данном справочнике собраны факты, теоремы и алгебраические приемы, выходящие за рамки стандартной школьной программы, но критически необходимые для решения актуальных задач ДВИ МГУ (на базе 2023–2025 гг.).

1. Нестандартные последовательности и рекурренты (№2)

1.1. Линейные рекуррентные соотношения 1-го порядка

Последовательность задана формулой вида $a_{n+1} = p \cdot a_n + q$, где p, q — константы, $p \neq 1$. Это не арифметическая и не геометрическая прогрессия в чистом виде. **Метод решения (сведение к ГП):**

- Ищем неподвижную точку (предел) последовательности, решая уравнение $c = p \cdot c + q$. Отсюда $c = \frac{q}{1-p}$.
- Вводим новую последовательность $b_n = a_n - c$.
- Доказываем, что $b_{n+1} = p \cdot b_n$. Таким образом, b_n — классическая геометрическая прогрессия со знаменателем p .
- Записываем $b_n = b_1 \cdot p^{n-1}$ и возвращаемся к исходной: $a_n = b_1 \cdot p^{n-1} + c$.

Пример: $a_{n+1} = \frac{5-a_n}{4}$, $a_1 = 11$. Решаем $c = \frac{5-c}{4} \implies 4c = 5 - c \implies c = 1$. Тогда замена $b_n = a_n - 1$ дает $b_{n+1} = -\frac{1}{4}b_n$, где $b_1 = 11 - 1 = 10$. Итоговая формула: $a_n = 1 + 10 \cdot (-1/4)^{n-1}$.

1.2. Функциональные уравнения с индексами

Если последовательность задана соотношением для любых n и m , например $a_{n+m} + a_{n-m} = 2(a_n + a_m)$, используем **метод подстановок**:

- Подстановка $m = 0$ часто позволяет найти нулевой член a_0 .
- Подстановка $m = n$ (или $m = 1$) позволяет получить явную рекуррентную формулу a_{2n} через a_n .

Пример: Из уравнения выше при $m = 0 \implies 2a_n = 2a_n + 2a_0 \implies a_0 = 0$. При $m = n \implies a_{2n} + a_0 = 2(a_n + a_n) \implies a_{2n} = 4a_n$. Зная $a_1 = 1$, последовательно находим $a_2 = 4$, $a_4 = 16$, $a_8 = 64$.

1.3. Метод «зажатия» между квадратами (Теория чисел)

Если требуется найти натуральное n , при котором выражение $f(n)$ является полным квадратом m^2 , необходимо оценить $f(n)$ сверху и снизу квадратами двух соседних (или близких) натуральных чисел:

$$(n+k)^2 < f(n) < (n+k+2)^2$$

Так как между ними лежит только один точный квадрат $(n+k+1)^2$, мы приравняем $f(n) = (n+k+1)^2$.

Пример: Для $n^2 + 7n + 1 = m^2$ при больших n справедливо зажатие между $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$ и $(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16$. Поскольку между соседними квадратами нет других квадратов целых чисел, задача сводится к перебору малых n и выделению полного квадрата через домножение на 4: $(2n+7)^2 - 4m^2 = 45 \implies (2n+7-2m)(2n+7+2m) = 45$.

2. Усложненные логарифмические тождества (№3-4)

2.1. Перестановка основания и аргумента в степени

Неочевидное, но важнейшее тождество для ДВИ:

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

Применяется для сведения «многоэтажных» неравенств вида $x^{\log_2 x}$ к $2^{\log_2^2 x}$.

Пример: В неравенстве $(\sqrt[3]{x})^{5+\log_2 x} \geq 2^{1+\log_2 x}$ логарифмирование обе части по основанию 2 дает: $\frac{5+\log_2 x}{3} \cdot \log_2 x \geq 1 + \log_2 x$, что сводится к квадратному уравнению относительно $t = \log_2 x$.

2.2. Взаимно обратные логарифмы с функцией в основании

В неравенствах вида $\log_x f(x) \vee \log_{f(x)} x$ при замене $t = \log_x f(x)$ мы получаем $t \vee \frac{1}{t}$. **Опасность:** Нельзя умножать обе части неравенства на t , так как знак t неизвестен! Необходимо переносить всё в одну сторону и приводить к общему знаменателю: $\frac{t^2-1}{t} \vee 0$.

Пример: Неравенство $\log_x (x^2 + \frac{3}{2}) \leq 4 \log_{x^2 + \frac{3}{2}} x$ после замены примет вид $t \leq \frac{4}{t} \Rightarrow \frac{(t-2)(t+2)}{t} \leq 0 \Rightarrow t \in (-\infty; -2] \cup (0; 2]$. Метод требует отдельного раскрытия для случаев $x > 1$ и $0 < x < 1$.

3. Продвинутая планиметрия (№5)

3.1. Метрическая формула длины биссектрисы

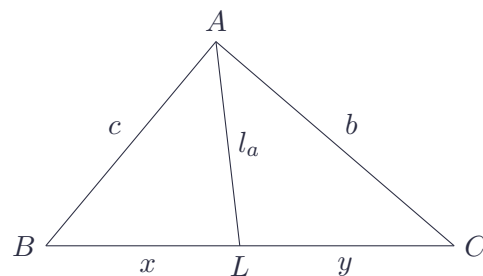
Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$. Квадрат длины биссектрисы l_a вычисляется как разность произведения боковых сторон и произведения отрезков основания:

$$l_a^2 = b \cdot c - x \cdot y$$

Это избавляет от необходимости дважды применять теорему косинусов для поиска длины биссектрисы.

3.2. Теорема Менелая для площадей

Если секущая пересекает стороны треугольника, разбивая их в определенных отношениях, теорема Менелая ($\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$) позволяет найти отношение отрезков на самих чевианах (например, $\frac{AO}{OK}$). **Следствие для площадей:** Если два треугольника имеют общую высоту, то отношение их площадей равно отношению их оснований ($S_1/S_2 = a_1/a_2$).



4. Алгебраические оценки и многочлены (№6)

4.1. Неравенство Коши (AM-GM) для n переменных

Среднее арифметическое неотрицательных чисел больше либо равно их среднему геометрическому:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда **все числа равны между собой** ($a_1 = a_2 = \dots = a_n$). В ДВИ наиболее востребованы случаи для $n = 3$: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. **Важное следствие:** Для любого $x > 0$ справедливо $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

4.2. Теорема Виета для многочленов высших степеней

Для кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$:

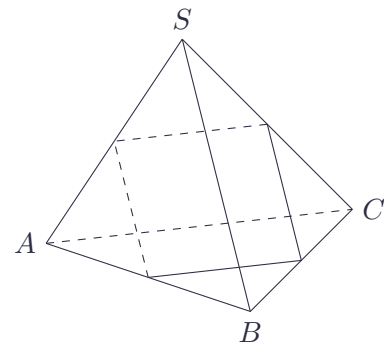
$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{C}{A}, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{D}{A}$$

Этот инструмент позволяет восстанавливать корни, если из геометрии функции (например, точки экстремума) известен хотя бы один корень производной.

5. Специфическая стереометрия (№7)

5.1. Сечения, образующие параллелограмм/квадрат

По теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей: если секущая плоскость пересекает параллельные грани многогранника, то линии пересечения параллельны. В пирамидах: если секущая плоскость образует квадрат, его стороны обязательно параллельны скрещивающимся ребрам пирамиды (одному ребро основания и одному боковому). Их длины находятся через подобие отсекаемых треугольников на гранях.



5.2. Свойства ромбоэдра (наклонного параллелепипеда)

Если у параллелепипеда все ребра равны, а плоские углы при вершине основания равны между собой, то проекция бокового ребра на плоскость основания строго совпадает с биссектрисой угла основания. Выделенный тетраэдр, отсекаемый от такого параллелепипеда, является правильной треугольной пирамидой.